• FOLHA Nº 03 – GABARITO COMENTADO •

1) $(2 + b)^3 = 0 + 5b + 7b^2 + b^3$

$8 + 12b + 6b^2 + b^3 = 5b + 7b^2 + b^3$

$b^2 - 7b - 8 = 0$

$(b - 7) . (b - 1) = 0.$

Como b é base, b = 7.

OPÇÃO A

2) Os algarismos ímpares são 1, 3, 5, 7 e 9. Para que o número seja divisível por 3, a soma dos seus 3 algarismos deve ser múltiplo de 3. Os conjuntos de três algarismos nessas condições são {1,3,5}, {3,5,7}, {5,7,9} e {1,5,9}. Com cada um desses conjuntos podem-se formar seis números diferentes. Por exemplo, para o primeiro, temos os números 135, 153, 315, 351, 513 e 531. Portanto, há 4 x 6 = 24 números.

OPÇÃO B

3) 5 + 8 + 3 + a + b terá que ser divisível por 9. Daí para se ter o maior valor possível 16 + a + b tem que ser máximo, logo a + b = 11.

OPÇÃO D

4) Não podemos colocar o número 1 em nenhuma bola, pois o MDC entre 1 e qualquer outro número é 1, assim temos 998 números disponíveis. Além disso, se forem usadas 500 bolas ou mais, haverá duas com números consecutivos, sempre primos entre si, então não podemos colocar mais que 499 bolas. Mas existe uma forma de colocar 499 bolas, usando os números pares de 2 a 998.

OPÇÃO B

5) Seja n = abcd

De acordo com o problema, temos:

a = 1 (menor número natural)

n = 1b24

Como o número é divisível por 3, a soma de seus algarismos deve formar um número divisível por 3, ou seja, $a + b + c + d = 3k \rightarrow 1 + b + 2 + 4 = 3k$, com isso o menor valor para o algarismo das centenas deve ser b = 2; logo o número é n = 1224

n + 1 = 1225, que é divisível por 7 $\rightarrow \dfrac{1225}{7} = 175$

OPÇÃO A

6) Como $16 = 2^4$, basta descobrirmos os 4 últimos dígitos do número pedido.

De 1 a 9, teremos 9 números de 1 algarismo, portanto 9 algarismos.

De 10 a 99 teremos 90 números de 2 algarismos, portanto 180 algarismos.

Somando os algarismos, obtemos 189.

Se o número formado terá 1002 algarismos, temos que restam 813 algarismos (1002 – 189).

Todos esses 813 algarismos serão ocupados por números naturais de três algarismos.

Assim sendo, ainda restam 271 números (813 : 3) de três algarismos para serem justapostos.

$100 \rightarrow 200 \Rightarrow 101$ números

201 → 300 ⇨ 100 números

301 → 370 ⇨ 70 números

Logo, o número formado será:

N = 123456789101112...368369370

O resto da divisão desse número por 16 será igual ao resto da divisão de 9370 por 16.

Como 9370 : 16 deixa resto 10, o resto da divisão de ***N*** por 16 nos dará resto ***10***.

OPÇÃO E

7) Seja $k = a_1 + a_6 = a_2 + a_5 = a_3 + a_4$. Temos $3k = a^1 + a_2 + ... + a_6$ é múltiplo de 9, uma vez que n é múltiplo de 9.
Daí, segue que k é múltiplo de 3.
Mas, como os algarismos são distintos, perceba que
$1 + 2 + ... + 6 \leq a_1 + a_2 + ... + a_6 \leq 4 + 5 + ... + 9 \leftrightarrow 21 \leq 3k \leq 39$ « $7 \leftrightarrow k \leq 13$.
Como k é múltiplo de 3, temos dois casos: $k = 9$ e $k = 12$.
1º caso: $k = 9$. Veja que é suficiente escolhermos a_1, a_2 e a_3, pois $a_4 = 9 - a_3$, a5 $= 9 - a_2$ e $a_6 = 9 - a_1$. Como os dígitos devem ser distintos, devemos escolher a_1, a_2 e a_3 de modo que haja no máximo um dígito em cada um dos conjuntos {1, 8}, {2, 7}, {3, 6} e {4, 5}. Esta escolha pode ser feita da seguinte forma:
· Escolhemos três dos quatro conjuntos: 4 maneiras;
· Em cada um dos três conjuntos acima, escolhemos um dos dois dígitos: $2^3 = 8$ maneiras;
· Permutamos os dígitos escolhidos: 3 x 2 x 1 = 6 maneiras.
Logo, o total de números, neste caso, é igual a 4 x 8 x 6 = 192.
2º caso: k = 12. Neste caso, os dígitos a_1, a_2 e a_3 devem ser escolhidos do conjunto
{3, 4, 5, 7, 8, 9} de modo que haja no máximo um dígito em cada um dos conjuntos
{3, 9}, {4, 8} e {5, 7}. Esta escolha pode ser feita da seguinte maneira:
· Em cada um dos três conjuntos acima, escolhemos um dos dois dígitos: $2^3 = 8$ maneiras;
· Permutamos os dígitos escolhidos: 3.2.1 = 6 maneiras.
Logo, o total de números, neste caso, é igual a 8 x 6 = 48.
O total de números é, portanto, 192 + 48 = 240.

OPÇÃO A

8) Temos $13^1 = 1\underline{3}$, $13^2 = 16\underline{9}$, $13^3 = 219\underline{7}$, e $13^4 = 2856\underline{1}$.
A partir desse ciclo, $13^5 = 13^1 . 13^4 = 37129\underline{3}$, $13^6 = 13^2 . 13^4 = 482680\underline{9}$, $13^7 = 13^3 . 13^4 = 6274851\underline{7}$ e $13^8 = 13^4 . 13^4 = 81573072\underline{1}$. Veja que 13^5, 13^6, 13^7 e 13^8 terminam com o mesmo algarismo que, respectivamente, 13^1, 13^2, 13^3 e 13^4. Desse modo podemos formar grupos de 4 em 4, sabendo que o algarismo das unidades desses grupos são 3, 9, 7 e 1.
Como 2007 = 501 . 4 + 3, podemos formar 501 grupos com algarismo das unidades 3, 9, 7 e 1, restando apenas os números 13^{2005}, 13^{2006} e 13^{2007}, que tem algarismo das unidades 3, 9 e 7, respectivamente. Portanto o algarismo das unidades da soma é o algarismo das unidades de (3 + 9 + 7 + 1) . 501 + (3 + 9 + 7) = 20 . 501 + 19 = 10020 + 19 = 10039 , o algarismo 9.

OPÇÃO E

9) Como N é o quadrado de um quadrado perfeito, N é uma quarta potência e, como possui o fator $12 = 2^2 \times 3$, N deve ser divisível por $2^4 \times 3^4 = 1296$. Logo. N é da forma $1296k$, em que k é inteiro positivo. Portanto, $N/12 = 108k$ e o menor valor possível para $N/12$ é 108.

OPÇÃO E

10) Vamos analisar os restos das divisões de 2^n e ^{n} por 5.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	20
n	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	**0**
$\mathbf{2^n}$	2	4	3	1	2	4	3	1	2	4	3	1	2	4	3	1	2	4	3	**1**
$\mathbf{2^n + n}$	3	1	1	0	2	0	0	4	1	4	4	3	0	3	3	2	4	2	2	**1**

Veja que os restos das divisões de 2^n por 5 formam uma sequência de período 4, enquanto que os restos das divisões de n por 5 formam uma sequência de período 5. Logo, os restos das divisões de $2n + n$ formam uma sequência de período 20, dada pela última linha da tabela acima. Dessa forma, tomando os números de 1 a 10000 em intervalos de tamanho 20, o maior n tal que $2^n + n$ deixa resto zero na divisão por 5 é o 13º termo do ultimo intervalo, ou seja, o número 9980 + 13 = 9993.

OPÇÃO E

11) De $\frac{17}{18} = x^4 + y^4 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2(xy)^2 = 1 - 2(xy)^2$, obtemos $(xy)^2 = \frac{1}{36}$, e daí $\frac{1}{xy} = 6$.

OPÇÃO C

12) Temos que $y^2 - x^2 = 85^2 = 5^2.17^2$.

Temos, então, quatro possibilidades

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 5^2.17^2, \end{cases} \quad \begin{cases} y - x = 5 \\ y + x = 5.17^2, \end{cases} \quad \begin{cases} y - x = 17 \\ y + x = 5^2.17, \end{cases} \quad \begin{cases} y - x = 5^2 \\ y + x = 17^2. \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas temos:

x	3612	720	204	132
y	3613	725	221	157

O menor valor da soma $x + y$ é 289.

OPÇÃO A

13) $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} + \frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} = \frac{8}{6}$

Calculando o MMC, temos:

$$\frac{2(yz + xz + xy) + x^2 + y^2 + z^2}{xyz} = \frac{8}{6}$$

$$\frac{(x + y + z)^2}{xyz} = \frac{8}{6}$$

$$\frac{(16)^2}{xyz} = \frac{8}{6}$$

$$xyz = \frac{6.256}{8}$$

$xyz = 192$

OPÇÃO A

14) $a + b + c = 0$

$a + b = -c$

$(a + b)^3 = (-c)^3$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -c^3$

$a^3 + b^3 + c^3 = -3ab(a + b)$

$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

OPÇÃO C

15) $N = 13a + b$

$N = 5b + a$

$13a + b = 5b + a$

$12a = 4b \rightarrow b = 3a$, substituindo, temos:

$N = 13a + 3a$

$N = 16a$

Os possíveis valores de N são: 16, 32, 48, 64, 80 e 96

A soma dos valores é 336

OPÇÃO B

16) Item (A) Falso, pois, por exemplo 1 2 = 0,5

Item (B) Falso, pois, por exemplo 4 3 = 1, 333... e o resto é igual a 0,00

Item (C) Falso, pois, apesar de correto, D = d q + r, isso não é o motivo pelo qual da existência das dízimas periódicas.

Item (D) Correto, pois, o resto é sempre maior ou igual a zero e menor do que o quociente, ou seja, $0 \leq$ resto $<$ quociente, assim por exemplo na fração irredutível $\frac{2}{13}$, os restos possíveis serão:

{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 e 12} ou seja $\frac{2}{13}$ = 0,153846153846153846153846153846, observe que o resto nunca será zero, se não seria decimal exata.

Item (E) Falso, pois, por exemplo 13 : 7 deixa quociente igual a 1 e o resto é igual a 6.

OPÇÃO D

17) Observe que $861 = 3 \cdot 7 \cdot 41$

Assim $N + 1 = 3\,q1 + 3$ (divisível por três)

$N + 4 = 3\,q2 + 7$ (divisível por sete)

$N + 22 = 41\,q3 + 41$ (divisível por quarenta e um)

Logo $K = (N + 1)(N + 4)(N + 22)$ é divisível por 861

Daí o resto é zero

OPÇÃO A

18) $N = ZXYZXYZXY = (ZXY)10^6 + (ZXY)10^3 + (ZXY)10$

$ZXY(10^6 + 10^3 + 10) = (ZXY)(1001001) = 3(333667)\,ZXY$.

Logo, N é sempre divisível por 333667.

OPÇÃO D

19) É claro que o maior valor possível a ser tirado para termos o menor valor é o número 98, que é o maior número de dois algarísmos DISTINTOS.

Assim, para o produto AB × CD ser o menor possível, temos que pegar o menor número de dois algarísmos DISTINTOS e multiplicar pelo menor número de dois algarísmos DISTINTOS formado pelos algarísmos NÃO UTILIZADOS, isto é:

$10 \times 23 = 230$

Daí $10 \times 23 - 98 = 230 - 98 = 132$

OPÇÃO B

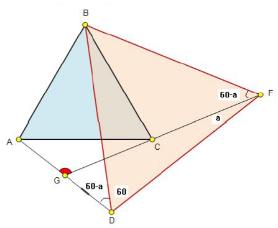
20) $\dfrac{2}{m} = \dfrac{3}{4} = \dfrac{12}{16}$ caso seja compatível e indeterminado.

$\dfrac{2}{m} \neq \dfrac{3}{4}$ caso seja compatível e determinado

Logo podemos ter uma solução $m = 8/3$ ou infinitas soluções $m \neq 8/3$

OPÇÃO E

21) Observe o triângulo BCF é congruente ao Triângulo BAD.



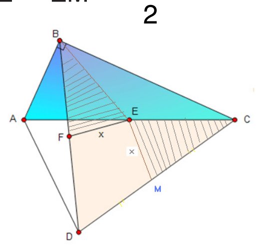
Se a medida do ângulo DCF = a, então ângulo BFC = 60° – a,

Ângulo AGF = 60 – a + 60 + a = 120°

OPÇÃO E

22) Os triângulos BEF e MCE, são congruentes pois, o ângulo FBC é igual ao ângulo MCE.

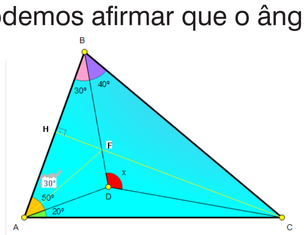
Sendo M ponto médio de CD, o segmento FE = EM = $\dfrac{AD}{2}$



Como AD = 16 cm, então FE = 8 cm.

OPÇÃO C

23) Sendo CH a altura relativa ao lado AB, podemos afirmar que o ângulo HAF = 30°

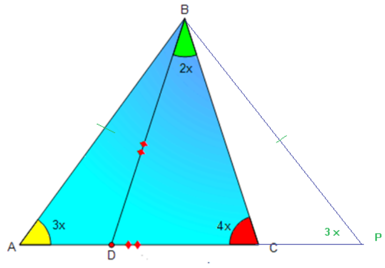


Observe que o no triângulo ACF, o ponto D é o incentro, daí; o ângulo DCF = 10° e o ângulo DFC = 60°.

Como x + 60° + 10° = 180°; temos que a medida x = 110°

OPÇÃO B

24) Observe que o triângulo BDP é isóscele, e que os triângulos ABC e BDP são congruentes.
Daí, podemos afirmar que os ângulos ABC e DBP são iguais a 3x.



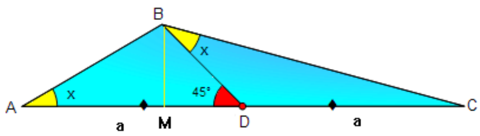
Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, temos:
$10x = 180$; $x = 18$, logo: $3x = 54° = 60gr$

OPÇÃO E

25) Observe que os triângulos ABC e BCD são semelhantes.

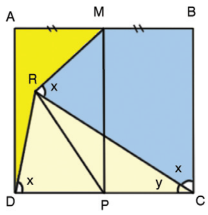
Logo: $\dfrac{2a}{BC} = \dfrac{BC}{a}$; ou seja: $BC = a\sqrt{2}$ e $AB = BD\sqrt{2}$.

Seja BM a altura do tri ângulo ABD. Como BM vale a metade de AB, conclui-se que a medida do ângulo X é 30°



OPÇÃO E

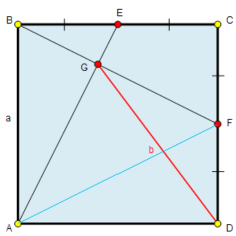
26) Como $x + y = 90°$, o triângulo CDR é retângulo e PR é mediana relativa à hipotenusa CD.
Observe que MP é igual a CD, que vale o dobro de PR.



O triângulo PMR é retângulo o ângulo RMP é igual a 30° daí; a medida do ângulo $x = 75°$

OPÇÃO C

27) No quadrado abaixo, o ângulo BGE é reto.
Como o quadrilátero ADFG é inscritível, o ângulo AGD é igual ao ângulo DAG, daí temos:
AD = AG = 6 cm.



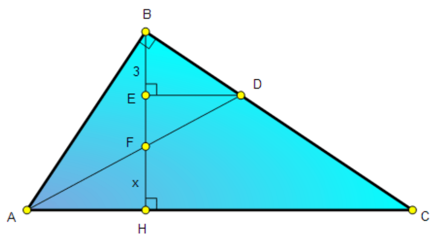
OPÇÃO B

28) Observe que os triângulos AFH e ABD são semelhantes, bem como os triângulos ABH e BED. Daí:

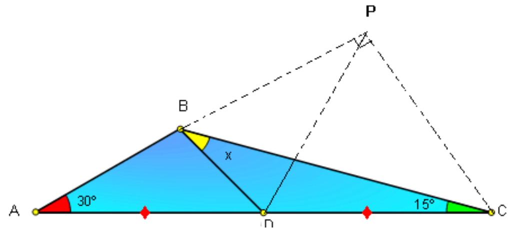
X / BD = AH / AB = 3 / BD.

x = 3

OPÇÃO C



29)

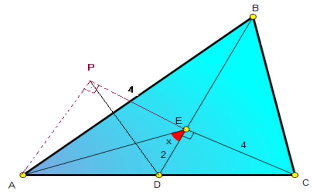


Observe que na figura, o ângulo PBC tem 45°, bem como o PCB, e o triângulo DPC é equilátero,pois DP é a mediana relativa à hipotenusa.

OPÇÃO B

30) Trace AP perpendicular a CE. Como AD = DC, o triângulo PED é congruente ao triângulo ECD.

Como PE=CE=4 e AC = $4\sqrt{5}$, daí temos por Pitágoras PA = 4 e o ângulo x =45°



OPÇÃO E